Dodatek

D1. Tensory

W opracowaniu korzystamy zarówno ze *wskaźnikowego* jak i *absolutnego* zapisu pól wektorowych a_i (czyli tensorów o walencji 1) oraz tensorowych $a_{i\ldots j}$. Stosujemy przy tym konwencję sumacyjną Einsteina

$$\sum_j A_{ij} x_j = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 \tag{D.1.1}$$

polegającą na sumowaniu po powtarzającym się indeksie np. j = 1,2,3, l = 1,2,3, przy czym powtarzające się indeksy tzw. *nieme* można zamienić na inne, czyli

$$A_{ij} x_j = A_{il} x_l \ , \qquad j \to l \tag{D.1.2}$$

W rachunku tensorowym korzystamy z *macierzy jednostkowej* δ_{ij} - tzw. symbol Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases} \tag{D.1.3}$$

oraz *symbolu permutacyjnego*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{parzysta liczba przedstawień } 1,2,3 \\ -1 & \text{nieparzysta liczba przedstawień } 1,2,3 \\ 0 & \text{inne przypadki} \end{cases} \tag{D.1.4}$$

Kolejnym charakterystycznym tensorem jest *tensor izotropowy* a_{ij}

$$a_{ij} = a\delta_{ij}$$

Niezmiennikami nazywamy skalary zbudowane na tensorach, np.

$$A_{ij} \quad \to \quad I_A = A_{ii} \quad , \quad II_A = A_{ij}A_{ji} \quad , \quad III_A A_{ik}A_{kj}A_{ji} \tag{D.1.5}$$

$$a_i \quad \to \quad a_i a_i$$

Przypisanie każdemu punktowi $x_i \in V$ pewnej przestrzeni V tensora **F** nazywamy *polem tensorowym*. Typowe operacje na polach tensorowych $\mathbf{F}(F_i)$ przyjmą postać

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= grad\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x_k} F_i = F_{i,k} \\
\mathbf{B} &= div\mathbf{F} \quad = \frac{\partial}{\partial x_k} F_k = F_{k,k} \\
\mathbf{C} &= rot\mathbf{F} \quad = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k = \varepsilon_{ijk} F_{k,j}
\end{aligned}
\tag{D.1.6}
$$

D2. Liniowe równania tensorowe

Analizować będziemy liniowe równania tensorowe spotykane w fizyce. Przykładami są tu równania ujmujące prawa Hooke'a, Ficka, Ohma i in. Każde z tych równań można zapisać w formie zależności między wektorami lub tensorami o różnej walencji.

Rozważania rozpoczniemy od przypadku najprostszego – *równań skalarowych*

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \rightarrow \quad Y = AX + B \tag{D.2.1}$$

Ogólniejszą, ale podobną formę posiadają *równania macierzowe* zapisane wektorowo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{B} \tag{D.2.2}$$

lub w równoważnej *formie wskaźnikowe*j

$$Y_i = A_{ij} X_j + B_i \tag{D.2.2'}$$

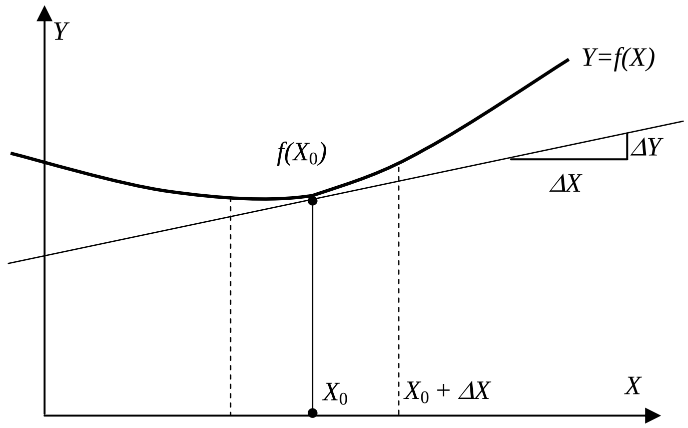
Równania te są w istocie liniową relacją między parą wektorów **X** i **Y**, $\mathbf{A} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$.

Forma równań (D.2.2) pozwala zauważyć ogólną prawidłowość polegającą na tym, iż przy „współczynniku” **A** pojawiają się indeksy występujące przy wektorach **X** – zmiennej niezależnej oraz **Y** – zmiennej zależnej. Natomiast wyraz wolny **B** posiada takie same indeksy jak **Y**.

Ogólna postać *liniowego algebraicznego równania tensorowego* ma formę

$$Y_{i....j} = A_{i....j\,k...l} X_{k...l} + B_{i....j} \tag{D.2.3}$$

W równaniu tym obiekt $X_{k...l}$ – jest bodźcem (przyczyną) $Y_{i...n}$ – strumieniem (skutkiem), a $A_{i...j\,k...l}$ – „współczynnikiem" którego postać zależy od własności fizycznych ośrodka. Zauważmy, iż tensor A posiada indeksy równe sumie indeksów przy zmiennej niezależnej X i zależnej Y.



Rys. D.1.1. Zależność funkcyjna

Podane rozważania można uogólnić na przypadek *nieliniowy*, jeżeli tylko równania (D.2.3) zapisać w formie przyrostowej

$$\Delta Y_{i...j} = A_{i...jk...l} \Delta X_{k...l} + \Delta B_{i...j} \tag{D.2.4}$$

w której tensor **A** zależy od aktualnej wartości zmiennej niezależnej **X.**

W szczególności, nieliniowe równanie fizyczne łączące pary symetrycznych tensorów $(\varepsilon_{ij}, \sigma_{kl})$ ma postać

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + G_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} \tag{D.2.5}$$

D3. Symetrie materiałowe

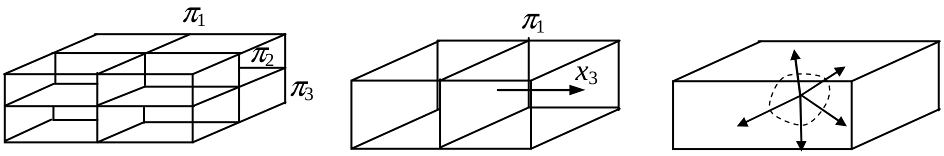
W omawianych równaniach tensorowych tensor „współczynników" **A** ujmuje fizyczne własności materiałów o różnych symetriach materiałowych, wśród których najogólniejsze są materiały anizotropowe zaś najprostsze izotropowe.

Równanie (D1.3) dotyczy ogólnego przypadku materiału anizotropowego. Natomiast szczególne symetrie materiału prowadzą m.in. do materiałów:

– ortotropowych – o trzech płaszczyznach symetrii π_1,

– transwersalno – izotropowych,

– izotropowych.



Rys. 34.1. Symetrie materiałowe

Materiały ortotropowe

Tensorowa baza ośrodka ortotropowego ma postać $a_{ij}^{\alpha} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha} \quad \alpha = 1,2,3$ na podstawie której możemy podać:

– tensorowy odpowiednik tensora a_{ij} o walencji 2 postaci

$$a_{ij} = \alpha_1\delta_{i1}\delta_{j1} + \alpha_2\delta_{i2}\delta_{j2} + \alpha_3\delta_{i3}\delta_{j3} \tag{D.3.1}$$

– tensora E_{ijkl} o walencji 4

$$\begin{aligned}E_{ijkl} &= \alpha_1(a_{ij}a_{kl} + a_{ij}a_{kl}) + \alpha_2(a_{lk}a_{jl} + a_{il}a_{jk} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}) + \\ &+ \alpha_3(a_{ij}a_{kl} + a_{ij}a_{kl}) + \frac{1}{3}\alpha_4(a_{ij}a_{kl} + a_{il}a_{jk}) + \\ &+ \alpha_5(a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}) + \frac{1}{3}\alpha_6(a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}) + \\ &+ \frac{1}{3}\alpha_7(a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}) + \alpha_8(a_{ij}a_{kl} + a_{ij}a_{kl}) + \\ &+ \alpha_9(a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk})\end{aligned} \tag{D.3.2}$$

W podanych wzorach współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9$ są skalarowymi funkcjami niezmienników tensora X zmiennej niezależnej w równaniu tensorowym (D.2.2).

Materiały transwersalno – izotropowe

Tensorowa baza tych materiałów to wektor δ_{3i} oraz a_{ij} .

Baza: δ_{3i} i $a_{ij} = \delta_{i1} + \delta_{i2}\delta_{j2}$.

Na podstawie tensorów bazowych podamy:

– odpowiednik tensora o walencji 2 w materiale transwersalno – izotropowym

$$\lambda_{ij} = \alpha_1(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \alpha_2\delta_{3i}\delta_{3j} \tag{D.3.3}$$

– transwersalno- izotropowy tensor o walencji cztery E_{ijkl}

$$\begin{aligned} E_{ijkl} = {} & \alpha_1 a_{ij} a_{kl} + \alpha_2(a_{ik}a_{jl} + a_{jk}a_{il}) + \alpha_3(a_{ij}\delta_{3k}\delta_{3l} + a_{kl}\delta_{3i}\delta_{3j}) + \\ & + \alpha_4(\delta_{3i}\delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{3l}) + \\ & + \alpha_5(a_{ik}\delta_{3j}\delta_{3j}\delta_{3l} + a_{jk}\delta_{3i}\delta_{3l} + a_{il}\delta_{3j}\delta_{3k} + a_{jl}\delta_{3i}\delta_{3k}) \end{aligned} \tag{D.3.4}$$

– tensor o walencji trzy D_{ijk}

$$D_{ijk} = \alpha_1(a_{ij}\delta_{3k} + a_{ik}\delta_{3j} + a_{jk}\delta_{3i}) + \alpha_2\delta_{3i}\delta_{3j}\delta_{3k}$$

Materiały izotropowe o tensorowej bazie: $a_{ij} = \alpha\delta_{ij}$ (tensor kulisty) prowadzą do następującej reprezentacji izotropowej:

– odpowiednik tensora o walencji 2 $\quad \lambda_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}$

– tensor o walencji 4 $\quad E_{ijkl}$

$$E_{ijkl} = \alpha_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{D.3.5}$$

– tensor o walencji 3 $\quad E_{ijk} = \alpha\,\varepsilon_{ijk}$

– tensor izotropowy o walencji 6 $\quad G_{ijklmn}$

$$\begin{aligned} G_{ijklmn} = {} & \alpha_1\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \alpha_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\delta_{mn} + \\ & + \left[\alpha_4(\delta_{ij}\delta_{mn}) + \alpha_5(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})\right]\delta_{kl} + \\ & + \left[\alpha_6(\delta_{kl}\delta_{mn}) + \alpha_7(\delta_{km}\delta_{\ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})\right]\delta_{ij} + \\ & + \left[\alpha_8(\delta_{jk}\delta_{lm}) + \alpha_9(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})\right]\delta_{in} \end{aligned} \tag{D.3.6}$$

Odpowiedzi

I.1. Należy rozpisać współrzędne tensora E_{ij} i pominąć w nim wszystkie pochodne typu $\frac{\partial}{\partial x_3}$

I.2. Podstawiając do podstawowych niezmienników współrzędne E_{ij} wyliczamy odpowiednio $I_E = E_{11} + E_{22} + E_{33}$,

$$II_E = E_{ij}E_{ji} = E_{i1}E_{1i} + E_{i2}E_{2i} + E_{i3}E_{3i} = E_{11}E_{11} + E_{21}E_{12} + E_{31}E_{13} + \ldots\ldots\ldots$$

I.3. W tensorze naprężeń na powierzchni $x_3 = 0$ znikać powinny wszystkie współrzędne tensora naprężeń postaci σ_{i3} i σ_{3i}

I.4. W układzie równań ruchu (6.3) znikają wszystkie składowe przyrostów tensora naprężeń postaci $\frac{\partial}{\partial x_3}()$

I.5. Precyzujemy najpierw postać tensora odkształceń w zadaniu płaskim, np. dla płaszczyzny $x_3 = 0$ znikają w tensorze ε_{ij} wszystkie pochodne postaci $\frac{\partial}{\partial x_3}$. Następnie uzyskaną formę tensora ε_{ij} podstawiamy do równań fizycznych

I.6. Korzystamy z form równań podanych w dodatku

I.7. W równaniach od (7.1) do (7.6) pomijamy składowe $u_2 = u_3 = 0$ pola przemieszczeń, podobnie jak wszystkie pochodne $\frac{\partial}{\partial x_2}$ i $\frac{\partial}{\partial x_3}$

II.1. Bilans energii dla warstwy przypowierzchniowej np. o grubości h uzyskujemy traktując element objętościowy $dV = dAh$ jako iloczyn elementu powierzchni dA i stałej grubości. Całki powierzchniowe zostają niezmienione w bilansie.

II.2. Warunki wymiany między częścią powierzchniową a objętościową sprowadzają się do równości całek powierzchniowych na wspólnych brzegach obu bilansów.

II.3. W bilansie energii całki powierzchniowe sprowadzą się do całki na powierzchni $x_3 = 0$. Podobne uwaga dotyczy przykładu 4.

II.5. Proces jest periodyczny, przy czym w chwilach $\omega t = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$ jest równowagowy.

II.6. Proces jest dla $0 < \omega < 1$ nierównowagowy, natomiast dla chwili $t > t_k$ i $\omega(t_k) = 1$ jest równowagowy.

II.7. Niezmienniki podstawowe to $I_\varphi = \varphi_{ii}$, $II_\varphi = \varphi_{ij}\varphi_{ji}$, $III_\varphi = \varphi_{ik}\varphi_{kj}\varphi_{ji}$

II.8. W pierwszym przypadku $j = k$ wystąpią tylko składowe φ_{11}, $\varphi_{22}, \varphi_{33}$ tensora φ_{ij}, zaś w drugim pozostałe składowe

II.9. W tensorze φ_{ij} znikają składowe φ_{i3}, i φ_{3j}

III.1. Prędkość barycentryczną **w** określa wzór $\rho\mathbf{w} = \rho_1\mathbf{v}_1 + \rho_2\mathbf{v}_2$, zaś strumienie masy muszą spełniać relację $\rho_1\mathbf{u}_1 + \rho_2\mathbf{u}_2 = 0$. Wynika stąd, iż będą przeciwnie skierowane o równych modułach wektorów strumieni dyfuzyjnych.

III.2. W przypadku mieszaniny dwuskładnikowej warunek ten oznacza, iż globalnie przebiega w niej proces równowagowy, gdyż $\rho\mathrm{R} = 0$.

III.3. W zginanej belce odkształcenia $\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\kappa} z$, gdzie κ jest krzywizną belki, a *z* odległością od osi obojętnej. Całkując z kolei nierówność rezydualną po przekroju poprzecznym belki $\rho\int_F \frac{dU}{dt} dF + \int_F \sigma_{11}\dot{\varepsilon}_{11} dF \geq 0$ otrzymamy $\rho\frac{d\overline{U}}{dt} + M\dot{\kappa} \geq 0$ gdzie $\overline{U} = \int_F U dF$, $M = \int_F \sigma_{11} z dF$. Wzór ten pozwala śledzić zmiany krzywizn w belce w trakcie przemian energetycznych.

III.4. Analogiczne rozumowanie przeprowadzone w przypadku entalpii swobodnej ρG prowadzi do nierówności $\dot{\overline{G}} + \dot{M}\kappa \geq 0$ gdzie $\overline{G} = \int_F G dF$.

LITERATURA

[1] BOWEN R.M.: Theory of Mixtures, Continuum Physics, A.C. Eringen Academic Press, New York 1976

[2] COLEMANN B.D., NOLL W.: Foundations of Linear Viscoelasticity, Revs. Modern Phys., 33, 239-349, 1961

[3] COSSERAT E., COSSERAT F.: Sur la theorie de l‘elasticite, Ann. Toulouse, 10, 1-116, 1896

[4] DERSKI W.: Zarys mechaniki ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1974

[5] DRUCKER D.C.: Introduction to Mechanics of Deformable Solids, McGraw-Hill, 1967

[6] ERINGEN A.C.: Theory of Continuous Media, John Wiley, New York 1964

[7] FUNG Y.C.: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN Warszawa 1969

[8] GREEN A.E., ZERNA Z.W.: Theoretical Continuum Mechanics, Oxford University Press, London 1954

[9] GREEN A.E., ADKINS J.E.: Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics, Clarendon Press, Oxford 1960

[10] de GROOT S.R.: Thermodynamics of Irreversible Processes, North-Holland, Amsterdam 1952

[11] de GROOT S.R., MAZUR P.: Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam 1962

[12] GURTIN M.E.: An Introduction to Continuum Mechanics, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1978

[13] HILL R.: The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford 1950

[14] HUBER T.: Właściwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materiału, Czasopismo Techniczne, XXII, Lwów 1904

[15] KACZANOW L.M.: Osnowy mechaniky rozruszenia, Izd. Nauka, Moskwa 1974

[16] KUBIK J.: Analogie i podobieństwa w liniowych ośrodkach odkształcalnych, cz. II Termodyfuzja lepkosprężysta, ZN Politechniki Śląskiej, Monografie, Bud. 38, Gliwice 1975

[17] KUBIK J.: Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent, IfM 44 Ruhr Uni, Bochum 1985

[18] KUBIK J.: The correspondence between equations of thermodiffusion and theory of mixtures, Acta Mech. Vol. 70 pp. 51÷60, 1986

[19] KUBIK J.: Thermodiffusion in a viscoelastic solids, Studia Geo. et Mech. 8, 2, 1986

[20] MISES R.: Mechanik der plastischen Formändesung von Kristallen, ZAMM, 8, 161-185, 1928
[21] NOLL W., TRUESDELL C.: The Non-linear Field Theories of Mechanics, Flugge's Encyclopedia of Physics 3, Part 3, 1960
[22] NOLL W.: The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Springer-Verlag, Berlin 1974
[23] NOWACKI W., OLESIAK Z.: Termodyfuzja w ciałach stałych, PWN, Warszawa 1991
[24] OLSZAK W., PERZYNA P., SAWCZUK A.: Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1965
[25] PERZYNA P.: Teoria lepkoplastyczności, PWN, Warszawa 1966
[26] PERZYNA P.: Termodynamika materiałów niesprężystych, PWN, Warszawa 1978
[27] PIPKIN A.C., RIVLIN R.S.: The Formulation of Constitutive Equations in Continuum Physics, I. Arch. Rational Mech. and Anal., 4, 129-144, 1959
[28] PRAGER W., HODGE P.G.: Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley, New York 1951
[29] RYCHLEWSKI J.: Tensory i funkcje tensorowe, Biuletyn 631, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk 1969
[30] SKRZYPEK J.: Plastyczność i pełzanie: teoria, zastosowania, zadania, PWN, Warszawa 1980
[31] SZCZEPIŃSKI W.: Mechanika plastycznego płynięcia, Małe Monografie, PWN, Warszawa 1978
[32] TRUESDELL C.: Sulle basi della termomeccanica, Rend. Fis. Acc Lincei VIII, 1957
[33] TRUESDELL C.: A first course in rational continuum mechanics, John Hopkins Univesity Press, Baltimore 1972
[34] TRUESDELL C.: Rational Thermodynamics, Springer Verlag, New York 1984
[35] WESOŁOWSKI Z.: Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1974
[36] WOŹNIAK CZ.: Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych, PWN Warszawa 1969
[37] WRÓBEL M.: Analiza przepływów ciepła i masy oddziaływujących z polem naprężeń w lepkosprężystości, praca doktorska, IIL, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1985
[38] WYRWAŁ J.: Wariacyjne ujęcie termodyfuzji lepkosprężystej, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1978
[39] ZIEGLER H.: An Introduction to Thermomechanics, North-Holland, Amsterdam 1977